4-11-91
(Αναπλήρωση)

5η Διάλεξη

① <u>Ανοιχτή μπάλα</u> με κέντρο $x_0 \in X$ και ακτίνα a: $B(x_0, a) = B_a(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < a\}$

② $A \subseteq X$: $x_0 \in A$ ονομάζεται <u>εσωτερικό</u> σημείο του A αν-ν $\exists\ r > 0$ τ.ω $B(x_0, r) \subseteq A$

(*) Το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων του A ονομάζεται εσωτερικό του A (συμβ. $\mathrm{int}A$, $\mathring{A}$)
Προφανώς, $\mathring{A} \subseteq A$

③ A <u>ανοιχτό</u> στο (X, d) αν $\mathring{A} = A$

④ $x_0 \in X$ <u>εξωτερικό</u> σημείο του A αν $x_0 \in ((X \setminus A)^o) = (A^c)^o$

(Συμβ. $Ex(A)$)

⑤ $A \subseteq X$ <u>κλειστό</u> στον (X, d) αν A^c ανοιχτό

⑥ $x_0 \in X$ ονομάζεται <u>συνοριακό</u> του A αν $x_0 \notin (\mathring{A} \cup Ex(A))$

και <u>$x_0 \in X$ συνοριακό</u> αν-ν $\forall\, \varepsilon > 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} - B(x_0, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \\ - B(x_0, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset \end{array}}$$

(*) A^o: Μεγαλύτερο ανοιχτό υποσύνολο του A

(7) <u>Σύνορο του</u> A : ∂A

(8) <u>Κλειστή Θήκη</u> = $\bar{A}$ = Το μικρότερο κλ. υποσύνολο που έχει το A.

(9) $\boxed{A^o \subseteq A \subseteq \bar{A}}$

<u>Πρόταση</u>: (i) $\emptyset, X$ ανοιχτά ⊕ κλειστά
(ii) $\mathcal{A}$ οικογένεια ανοιχτών $\Rightarrow \cup \mathcal{A}$ αν.
(iii) $\mathcal{A}$ -ιι- κλ. $\Rightarrow \cap \mathcal{A}$ κλ.
(iv) $A_1, \dots, A_n$ αν. πεπερασμένου πλήθους στ. $\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ ανοιχτό

(v) $A_1, \dots, A_n$ κλ. -ιι- $\Rightarrow \bigcup_1^n$ κλ

Απόδ.(iv)

Έστω $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \Rightarrow x \in A_i, \; i=1,\dots,n$

$\Rightarrow \exists \, \varepsilon_1 > 0$ τ.ω $B(x, \varepsilon_1) \subseteq A_1, \dots, \exists \, \varepsilon_n > 0$ τ.ω $B(x_0, \varepsilon_n) \subseteq A_n$

$\bigcap_1^n B(x, \varepsilon_i) \subseteq A_1 \cap \dots \cap A_n$

$\parallel$

$B(x, \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\})$

<u>Πχ</u> $\bigcup_1^{\infty} [0, 1 - 1/n] = [0, 1)$

Έστω $x \in [0,1) \Rightarrow 0 \leq x < 1 \Rightarrow \exists \, n \in \mathbb{N}$ τ.ω $0 \leq x \leq 1 - 1/n \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ τ.ω $x \in [0, 1-1/n] \subseteq \bigcup^{\infty} [0, 1-1/n]$

$[0,1) \subseteq \bigcup^{\infty} [0, 1-1/n]$

$$\overset{\overline{B}(x_0,\varepsilon)}{\text{H}}$$

Ορισμοί: (1) $B_c(x_0,\varepsilon) = \{x \in X : d(x,x_0) \leq \varepsilon\}$

(2) A κλειστό αν-ν $\bar{A} = A$

Πρόταση: Έστω $A \subseteq X$. Τότε, A κλ. αν-ν $\forall \{x_n\} \subseteq A$ συγκλίνουσα ισχύει $\lim x_n \in A$

Απόδ. "⇒" A κλειστό. Έστω $\{x_n\} \subseteq A$ τ.ω $x_n \to x \in X$
αρκεί ν.δ.ο $x \in A$.

Έστω $x \notin A \Leftrightarrow x \in A^c \Rightarrow$ ανοιχτό $\Rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0$ τ.ω $B(x,\varepsilon_0) \subseteq A^c$

Όμως, $x_n \to x \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall n \geq n_0 \ d(x,x_n) < \varepsilon$
Για $\varepsilon = \varepsilon_0$ έχω $d(x,x_{n_0}) < \varepsilon_0 \Rightarrow x_{n_0} \in B(x,\varepsilon_0) \subseteq A^c \Rightarrow$
$\Rightarrow x_{n_0} \notin A$ άτοπο.

"⇐" Αν $\{x_n\} \subseteq A$ τ.ω $x_n \to x$ τότε $x \in A$
Αρκεί ν.δ.ο A^c ανοιχτό. Έστω ότι δεν είναι

$\Rightarrow \exists x \in A^c$ τ.ω $\forall n \in \mathbb{N} \ B(x,1/n) \nsubseteq A^c$
$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in B(x,1/n)$ τ.ω $x_n \notin A^c$
$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in B(x,1/n)$ τ.ω $x_n \in A$
$\Rightarrow d(x,x_n) < 1/n \ \forall n \in \mathbb{N}$ και $x_n \in A \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \exists \{x_n\} \subseteq A$, τ.ω $x_n \to x$ και $x \notin A$ άτοπο

Ορισμός: $x_0 \in A$ σημείο συσσώρευσης με $A \subseteq X$ αν $\forall \varepsilon > 0 \ (B(x,\varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.

(*) Σύνολο σ.σ = A' = παράγωγο

(*) Αν x_0 όχι σ.σ τότε $\boxed{x_0 = \text{απομονωμένο}}$

(*) $\overline{(A^c)} = (A^o)^c$ και $(\bar{A})^c = (A^c)^o$

<u>Πρόταση</u>: $A \subseteq X$, $x \in X$. Τότε, $x \in \bar{A}$ αν-ν $\exists$ $\{x_n\} \subseteq A$ τ.ω $x_n \to x$

Απόδειξη

"$\Leftarrow$" $\exists$ $\{x_n\} \subseteq A \subseteq \bar{A}$ τ.ω $x_n \to x$ $\xRightarrow{\bar{A}\ \text{κλ.}}$ $x \in \bar{A}$

"$\Rightarrow$" Έστω $x \in \bar{A}$ $(\exists \{x_n\} \subseteq A$ τ.ω $x_n \to x)$ $\Leftrightarrow$

$(\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x \in A$ τ.ω $d(x_\varepsilon, x) < \varepsilon)$

Αν δεν υπάρχουν τέτοια $\{x_n\}$ τότε $\exists$ $\varepsilon > 0$ τ.ω $\forall\, y \in A$, $d(x,y) \geq \varepsilon \Rightarrow \exists\, \delta > 0$ τ.ω $B(x,\delta) \in A^c \Rightarrow$

$x \in (A^c)^o = (\bar{A})^c$ άτοπο αφού $x \in \bar{A}$

<u>Πρόταση</u>: (i) $x \in A' \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subseteq A \setminus \{x\}$ τ.ω $x_n \to x$
(ii) $\bar{A} = A \cup A'$
(iii) Αν $x \in A'$ τότε $\forall\, \varepsilon > 0$ $(B(x,\varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A$ άπειρο σύνολο

Απόδειξη

(i) "$\Rightarrow$" $x \in A' \Rightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}$ $(B_{1/n}(x, 1/n) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$
$\Rightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}$, $\exists\, x_n \in A$ τ.ω $d(x_n, x) < 1/n$, $x_n \neq x$

"$\Leftarrow$" $\exists \{x_n\} \subseteq A \setminus \{x\}$ τ.ω $x_n \to x$ $\Rightarrow$
$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall\ n \geq n_0,\ d(x_n, x) < \varepsilon$

$\Rightarrow$ Αν $\varepsilon > 0$, $x_{n_0} \in B(x, \varepsilon)$, $x_{n_0} \in A$, $x_{n_0} \neq x$

$\Rightarrow B(x, \varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.

(ii) Απο (i) $A' \subseteq \bar{A} \Rightarrow A' \cup A \subseteq \bar{A}$
Έστω $x \in \bar{A} \setminus A \overset{x \in \bar{A}}{\Longrightarrow} \exists\ \{x_n\} \subseteq A$ τ.ω $x_n \to x$

$\overset{x \notin A}{\Longrightarrow} \exists\ \{x_n\} \setminus \{x\}$ τ.ω $x_n \to x \xrightarrow{(i)} x \in A' \Rightarrow$
$\Rightarrow \bar{A} \setminus A \subseteq A' \Rightarrow \bar{A} \subseteq A' \cup A$

(iii) Έστω οτι $\exists\, \varepsilon > 0$ τ.ω $B(x, \varepsilon) \cap A$ πεπερασμ.
$\Rightarrow \exists\ x_1, \dots, x_n$ τ.ω $B(x, \varepsilon) \cap A = \{x_1, \dots x_n\}$

Αν πχ $x_n = x$ και $d(x_i, x) = \varepsilon_i > 0$, $i = 1, \dots, n-1$
Τότε Θέτω $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}\}$
$(B(x, \varepsilon_0/2) \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$ άτοπο.
Έστω (X, d), $Y \subseteq X$. Τότε (Y, d) είναι μετρικος χώρος. Ο (Y, d) λέγεται μετ. υπόχωρος του (X, d).

<u>Πρόταση</u>: Το $A \subseteq Y$ είναι ανοιχτό στον Y (αντίστοιχα κλειστό στο Y) αν-ν $\exists$ $B \subseteq X$ ανοιχτό (αντ. κλ.) στο Y τ.ω $A = B \cap Y$

Απόδ. Έστω ότι A κλειστό στον Y.
Θέτω B = η κλειστότητα του A στον X.

Αφού $A \subseteq B \Rightarrow A \subseteq B \cap Y$ αρκεί ν.δ.ο $B \cap Y \subseteq A$

Έστω $y \in B \cap Y \xRightarrow[B=\bar{A}]{} \exists \{y_n\} \subseteq A$ τ.ω $y_n \to y$

$(\exists \{y_n\} \subseteq A \cap Y$ τ.ω $y_n \to y)$

$\xRightarrow[\text{κλ. στον } Y]{A} y \in A \Rightarrow B \cap Y \subseteq A$

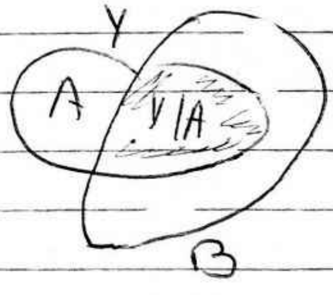
Έστω ότι $\exists B$ κλειστό στον X τ.ω $A = B \cap Y$
$\{x_n\} \subseteq A$ τ.ω $x_n \to x \in Y$.

$\xRightarrow[\text{στον } X]{B \text{ κλ.}} x \in B \Rightarrow x \in Y \cap B = A \Rightarrow A$ κλειστό στο Y

Τώρα A ανοιχτό στον $Y \Rightarrow Y \setminus A$ κλειστό στον Y

$\Rightarrow \exists B$ κλειστό στον X τ.ω $Y \setminus A = Y \cap B$

- $Y = (Y \cap A) \cup \underbrace{(Y \setminus A)}_{\text{ξένα}}$



$\Rightarrow \quad Y \cap A = A$

Πόρισμα: Αν $A \subseteq Y$ ανοιχτό στον X (αντ. κλ.) τότε A αν. στο Y